GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

1 Equation cartésienne d'un plan et vecteur normal

Nous avons vu :

- vecteur normal (définition, propriété)
- produit scalaire dans un RON (repère orthonormé)
- détermination d'un vecteur normal à un plan (ABC)

Remarque • On se placera désormais dans un RON $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de façon à pouvoir utiliser l'expression simple du produit scalaire ($xx'+yy'+zz'$).

Théorème • Dans un RON, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le plan $\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$, où d est un réel quelconque.

Remarque • Comme en géométrie plane avec les équations de droite, dire qu'un plan de l'espace admet une équation $ax+by+cz+d=0$ signifie que les coordonnées des points $M(x;y;z)$ du plan vérifient cette relation.

Remarque • Il n'y a pas **une seule** équation cartésienne d'un plan. Un plan admet une infinité d'équations cartésienne. Par exemple, si $2x+3y-z+2=0$ est l'équation d'un plan $\mathscr{P}$, alors $4x+6y-2z+4=0$ ou $-10x-15y+5z+10=0$ sont aussi des équations de $\mathscr{P}$.

Exemples

- La relation $2x+3y-5z+4=0$ est l'équation d'un plan de l'espace de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- La relation $2x+3y+1=0$ est, dans l'espace, l'équation **d'un plan** (ici $a=2$, $b=3$, $c=0$ et $d=1$) de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque • Le théorème s'utilise dans les deux sens : si on connait une équation du plan, on peut en déduire un vecteur normal ; si on connait un vecteur normal, on peut en déduire la forme d'une équation du plan.

Remarque • Quel que soit le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, un plan de l'espace admet toujours une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$. **MAIS** si le repère n'est pas orthonormé, on ne peut pas dire que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan.

2 Exemples fondamentaux

On suppose pour ce qui suit que le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est orthonormé.

2.1 Déterminer une équation de plan connaissant un point et un vecteur normal

Soit $A(2;1;0)$, $B(5;0;1)$ et $C(-2;1;3)$. Nous avons vu jeudi que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur du plan (ABC).

On en déduit que le plan (ABC) a une équation de la forme $3x+13y+4z+d=0$. Pour déterminer d, on remplace x, y et z par les coordonnées d'un point du plan. Par exemple, en prenant les coordonnées du point A, on obtient :

$$3x_A+13y_A+4z_A+d=0$$

$$6+13+0+d=0$$

$$d=-19$$

(ABC) a donc pour équation $3x+13y+4z-19=0$.

En prenant, les coordonnées de B, on aurait obtenu : $15+0+4+d=0$, soit aussi $d=-19$.

2.2 Savoir si un point appartient à un plan

On considère $D(3;1;-4)$.

Le point D appartient-il au plan (ABC) ? On examine si ses coordonnées vérifient l'équation de (ABC).

$3x_D+13y_D+4z_D-19=9+13-16-19=-13\neq 0$. Les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation du plan (ABC) donc le point D n'appartient pas au plan.

2.3 Plans parallèles

On va utiliser le résultat suivant :

Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils ont les mêmes vecteurs normaux (faire un dessin de deux plans parallèles avec une droite perpendiculaire aux deux).

Considérons le plan (ABC) précédent. Le point D n'appartient pas à ce plan. On cherche l'équation du plan $\mathscr{P}$ parallèle au plan (ABC) et passant par D.

Comme $\mathscr{P}$ est parallèle à (ABC), $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$, vecteur normal de (ABC) est aussi un vecteur normal de $\mathscr{P}$, donc une équation de $\mathscr{P}$ est de la forme $3x+13y+4z+e=0$.

D appartient à $\mathscr{P}$ d'où $3x_D+13y_D+4z_D+e=0$, puis $e=-6$. Une équation de $\mathscr{P}$ est donc $3x+13y+4z-6=0$.

Remarque • Etant donnés deux plans d'équations connues, pour savoir si ces plans sont parallèles, il suffit d'examiner si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

2.4 Droite perpendiculaire à un plan et passant par un point donné

Etant donné un plan $\mathscr{P}$ et un point M (qui peut appartenir, ou non, à ce plan), il existe une unique droite perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et passant par M (faire un dessin).
Pour déterminer une représentation paramétrique de cette droite, on utilise le résultat suivant : un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de toute droite perpendiculaire à ce plan.

Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (ABC) précédent et passant par le point D.
$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\13\\4\end{pmatrix}$, vecteur normal de $\mathscr{P}$, est un vecteur directeur de Δ. De plus, Δ passe par $D(3;1;-4)$ d'où la représentation paramétrique de Δ : $\mathscr{R}\quad\begin{cases}x=3+3t\\y=1+13t\\z=-4+4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

2.5 Plan perpendiculaire à une droite et passant par un point donné

Etant donnée une droite $\mathscr{D}$ et un point M (qui peut appartenir, ou non, à cette droite), il existe un unique plan passant par M et perpendiculaire à $\mathscr{D}$ (faire un dessin).
Pour déterminer une équation de ce plan, on utilise le résultat suivant : un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est un vecteur normal de tout plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Soient $\mathscr{D}$ la droite de R.P. $\mathscr{R}\quad\begin{cases}x=2+3t\\y=1-t\\z=5-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, et I le point de coordonnées $(6,1,2)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par I.
$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$, vecteur directeur de $\mathscr{D}$, est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$, donc une équation de $\mathscr{P}$ est $3x-y-z+d=0$

2.6 Plan médiateur d'un segment

Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points de l'espace qui sont équidistants de A et de B, c'est le plan $\mathscr{P}$ passant par le point I milieu du segment $[AB]$ et perpendiculaire à la droite (AB).
Les coordonnées de I s'obtiennent par la même formule qu'en géométrie plane (avec la côte en plus bien sûr) :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Le plan médiateur de $[AB]$ est donc le plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et passant par I.

2.7 Projeté orthogonal sur un plan

Soient $\mathscr{P}$ un plan et M un point quelconque de l'espace.
Soit $\mathscr{D}$ la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et passant par M (faire un dessin).
Le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathscr{P}$ est le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$.
Pour déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$, on procède comme en **2.4**, puis pour déterminer le point d'intersection entre $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$, on procède comme détaillé dans la feuille « cours : méthodes » (**2.2** page 4).

2.8 Projeté orthogonal sur une droite

Soient $\mathscr{D}$ une droite et M un point quelconque de l'espace.
Soit $\mathscr{P}$ le plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par M (faire un dessin).
Le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathscr{D}$ est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$.
Pour déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$, on procède comme en **2.5**.

2.9 Plans perpendiculaires

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Remarque • Ne pas confondre plans perpendiculaires et plans sécants (deux plans perpendiculaires sont sécants mais la réciproque est bien sûr fausse en général).

TRAVAIL À FAIRE POUR LA RENTRÉE

- bien travailler cette feuille ainsi que la feuille « cours : méthodes » puis chercher les exercices de la feuille (les exercices 1, 2, 3, 4 et 11 sont corrigés, pour certains il y a juste le résultat, nous corrigerons les autres à la rentrée) ;
- étudier (si besoin) les exemples proposés dans le livre (beaucoup d'exemples pages 336, 337 notamment ; attention tout de même au « savoir faire 6 » car on ne choisit pas c **avant** la résolution du système mais **après**).
- chercher les exercices 16, 17, 18 de la feuille « intégration (3) » (19 facultatif)
- réviser pour le bac (nous ferons sans doute un bac blanc la deuxième semaine après la rentrée) ; vous pourrez notamment récupérer sur le site de l'APMEP, le sujet de l'épreuve d'avril de Pondichéry :
  http ://www.apmep.asso.fr/Terminale-S-2013-bis
- enfin, s'il vous reste un peu de temps malgré tout cela, je vous conseille d'aller faire un tour sur :
  http ://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

BONNES VACANCES ET BON COURAGE !